Решить вариационную задачу:

$$\int_0^{4/3} \frac{x}{x'^2}\,dt \to extr \qquad x(0)=1, \quad x\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

Интегрант функционала:

$$F(t,x,x') = \frac{x}{x'^2}$$

Частные производные:

$$F_x = \frac{1}{x'^2} \qquad F_{x'} = -\frac{2x}{x'^3}$$

Уравнение Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt}\left(F_{x'}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(F_{x'}\right) = -2\left(\frac{x'\cdot x'^3 - x\cdot 3x'^2\cdot x''}{x'^6}\right) = -2\,\frac{x'^2 - 3x\cdot x''}{x'^4}$$

$$\frac{1}{x'^2} - \left(\frac{-2}{x'^2} + \frac{6xx''}{x'^4}\right) = \frac{3}{x'^2} - \frac{6x\cdot x''}{x'^4} = 0$$

$x'^2 - 2x\cdot x'' = 0$ – уравнение Эйлера

Замена: $x' = p(x)$

$$x'' = p\,\frac{dp}{dx}$$

$$p^2 = 2xp\,\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dp}{p} \Rightarrow p = C_1\sqrt{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = C_1\,dt$$

$$2\sqrt{x} = C_1 t + C_2$$

$x(t) = (C_1 t + C_2)^2$ — общее решение ур-я Эйлера
$t \in [0; \frac{4}{3}]$

Находим частные решения, удовлетворяющие краевым условиям.

$x(0) = C_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \pm 1$

$C_2 = 1$

$x(\frac{4}{3}) = (C_1 t + 1)^2 = \frac{1}{9}$

$C_1 \cdot \frac{4}{3} + 1 = \pm \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} C_1 = -\frac{4}{3} \qquad \frac{4}{3} C_1 = -\frac{2}{3}$

$\begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = 1 \end{cases}$

$C_2 = -1$

$x(\frac{4}{3}) = (C_1 \cdot \frac{4}{3} - 1)^2 = \frac{1}{9}$

$\frac{4}{3} C_1 - 1 = \pm \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} C_1 = \frac{4}{3} \qquad \frac{4}{3} C_1 = \frac{2}{3}$

$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -1 \end{cases}$

Найденные экстремали:

$x_1(t) = (1 - t)^2$

$x_2(t) = (1 - \frac{t}{2})^2$

$x_3(t) = (t - 1)^2$

$x_4(t) = (\frac{t}{2} - 1)^2$

Достаточное условие минимума Лежандра.

$F_{x'x'} > 0$

$(F_{x'})'_{x'} = \left(-\frac{2x}{x'^3}\right)'_{x'} = \frac{6x}{x'^4}$

Для всех экстремалей $x(t) \geq 0$

$(x')^4 \geq 0$, т.к. степень чётная

Для $x_1(t) = (1-t)^2$

$$F_{x'x'} = \frac{6\cdot(1-t)^2}{16\cdot(1-t)^4} = \frac{3}{8(1-t)^2} > 0$$

Аналогично - для остальных.

Значит, на всех полученных экстремалях достигается сильный <u>минимум</u>.