Приведение квадратичной формы к каноническому виду (Метод собственных векторов)

$$5x^2+2y^2+2z^2-2xy-4yz+2zx$$

1 Матрица квадратичной формы

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 5 & -1 & 1 \\ y & -1 & 2 & -2 \\ z & 1 & -2 & 2 \end{array} = A$$

2 Собственные числа

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=(5-\lambda)\cdot\left((2-\lambda)^2-4\right)+\lambda+\lambda=(5-\lambda)(\lambda-4)\cdot\lambda+2\lambda=$$

$$=\lambda\left(-\lambda^2+9\lambda-18\right)=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 6}$$ — собственные числа

③ Собственные вектора

1) $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

Длина вектора: $|\vec{B}_1| = \sqrt{0 + t^2 + t^2} = t\sqrt{2}$

Нормированный вектор: $\vec{B}_{1n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

2) $\underline{\lambda_2 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-3} \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y = t \\ y = t \\ z = -y = -t \end{cases} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$$

Длина вектора: $|\vec{b}_2| = \sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = t\sqrt{3}$

Нормированный вектор: $\vec{b}_{2_n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

3) $\underline{\lambda_3 = 6}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z = 2t \\ y = -z = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \vec{B_3} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}.$$

Длина вектора: $\left|\overline{B_3}\right| = \sqrt{4t^2+t^2+t^2} = t\sqrt{6}$

Нормированный вектор: $\overline{B_{3_n}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\overrightarrow{B_{1_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{B_{2_n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{B_{3_n}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

собственные вектора

4) Матрица перехода

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

⑤ Преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y' + \sqrt{2} z'}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{\sqrt{3} x' + \sqrt{2} y' - z'}{\sqrt{6}} \\ z = \dfrac{\sqrt{3} x' - \sqrt{2} y' + z'}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (*)$$

⑥ Приведение к диагональному виду

$$A_d = H^{-1} \cdot A \cdot H$$

H - ортогональная матрица. Поэтому:

$$H^{-1} = H^T$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (**)$$

В базисе (x, y, z), заданном преобразованием (*), квадратичная форма имеет вид:

$$A_d : \underline{\underline{3y'^2 + 6z'^2}}$$